Cherchons $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x - x}{x^2}$.

On pose $t = -x$. Lorsque $x \to 0^- \Rightarrow t \to 0^+$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(-t)+t}{t^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin t + t}{t^2} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin t - t}{t^2} = 0$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x - x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x - x}{x^2} = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^2} = 0$.

Solution 7 :

1°/Soit $f :]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x$

f est dérivable sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$,

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

f' est dérivable sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$

et $\forall x \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$, $f''(x) = 2\tan x\,(1+\tan^2 x)$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$	0	$+$	‖
$f'(x)$	1	↗	$+\infty$

Soient a et b tels que $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$.

f est dérivable sur [a,b] et $\forall x \in [a,b]$, $f'(a) \le f'(x) \le f'(b)$

(car f' est strictement croissante sur $[0, \dfrac{\pi}{2}[$)

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 a} \le f'(x) \le \frac{1}{\cos^2 b}$$